ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGUYỄN THỊ THU CÚC

BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM SINH BỞI CÁC ĐẠI LƯỢNG TRUNG BÌNH BẬC TÙY Ý VÀ CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

NGUYỄN THỊ THU CÚC

BẤT PHƯƠNG TRÌNH HÀM SINH BỞI CÁC ĐẠI LƯỢNG TRUNG BÌNH BẬC TÙY Ý VÀ CÁC DẠNG TOÁN LIÊN QUAN

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8460113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS.TSKH. Nguyễn Văn Mậu

THÁI NGUYÊN - 2019

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đối với GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu (Trường ĐH Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN), thầy đã trực tiếp hướng dẫn tận tình và động viên tác giả trong suốt thời gian nghiên cứu vừa qua.

Xin chân thành cảm ơn tới các quý thầy, cô giáo đã trực tiếp giảng dạy lớp cao học Toán K11, các bạn học viên, và các bạn đồng nghiệp đã tạo điều kiện thuận lợi, động viên giúp đỡ tác giả trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường. Tác giả cũng xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới gia đình và người thân luôn khuyến khích động viên tác giả trong suốt quá trình học cao học và viết luận văn này.

Mặc dù có nhiều cố gắng nhưng luận văn khó tránh khỏi những thiếu sót và hạn chế. Tác giả mong nhận được những ý kiến đóng góp của các thầy cô và các bạn đọc để luận văn được hoàn thiện hơn.

Xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Tác giả

Nguyễn Thị Thu Cúc

Mục lục

Mở đầu

Luận văn "Bất phương trình hàm sinh bởi các đại lượng trung bình bậc tùy ý và các dạng toán liên quan" nhằm cung cấp một số vấn đề cơ bản về phương trình và bất phương trình hàm chuyển tiếp các đại lượng trung bình, qua đó phân tích một số dạng toán liên quan trong các đề thi học sinh giỏi Việt Nam cũng như các bài thi Olympic các nước và khu vực.

Trong các kì thi học sinh giỏi toán các cấp, Olympic Toán sinh viên, các dạng toán liên quan tới phương trình và bất phương trình hàm thường xuyên được đề cập. Những dạng toán này thường được xem là thuộc loại khó vì phần kiến thức về chuyên đề này không nằm trong chương trình chính thức của SGK bậc trung học phổ thông.

Để đáp ứng nhu cầu bồi dưỡng giáo viên và bồi dưỡng học sinh giỏi về chuyên đề phương trình và bất phương trình hàm, tôi chọn đề tài luận văn "Bất phương trình hàm sinh bởi các đại lượng trung bình bậc tùy ý và các dạng toán liên quan".

Những năm gần đây đã có một số luận văn cao học khảo sát các phương trình (xem [4]) và bất phương trình hàm (xem [5]) chuyển tiếp các đại lượng trung bình cơ bản. Luận văn này nhằm mục tiêu hoàn thiện chuyên đề về bất phương trình hàm chuyển tiếp các đại lượng trung bình bậc tùy ý nhằm giúp các giáo viên cũng như học sinh trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi cấp trung học phổ thông.

Tiếp theo, trong luận văn khảo sát một số lớp bài toán về phương trình và bất phương trình hàm từ các đề thi học sinh giỏi Quốc gia và Olympic các nước những năm gần đây.

Cấu trúc luận văn gồm 3 chương:

Chương 1. Phương trình hàm chuyển tiếp các đại lượng trung bình.

Chương 2. Bất phương trình hàm sinh bởi các đại lượng trung bình.

Chương 3. Một số phương pháp giải phương trình, bất phương trình hàm qua các kỳ thi Olympic.

Chương 1. Phương trình hàm chuyển tiếp các đại lượng trung bình

Trong chương này, ta nhắc lại một số kiến thức về tập hợp và các hàm số sơ cấp. Đồng thời, ta xét lớp hàm chuyển tiếp từ đại lượng trung bình cộng, lớp hàm chuyển tiếp từ các đại lượng trung bình khác, phương trình hàm Lobachevsky, mối liên hệ giữa phương trình hàm Lobachevsky và phương trình hàm cổ điển.

1.1 Một số tính chất của tập hợp và các hàm số sơ cấp

Trong mục này, ta nhắc lại một số kiến thức cơ bản về tập hợp cần thiết được sử dụng để giải các phương trình hàm liên quan.

Định nghĩa 1.1 (xem [2],[3]).
a) Hàm số $f(x)$ được gọi là hàm tuần hoàn (cộng tính) chu kỳ a, $(a > 0)$ trên M nếu $M \subset D(f)$ và

$$\begin{cases} \forall x \in M \text{ thì } \; x \pm a \in M \\ f(x+a) = f(x), \quad \forall x \in M. \end{cases}$$

b) Cho $f(x)$ là một hàm tuần hoàn trên M. Khi đó $T\,(T > 0)$ được gọi là chu kỳ cơ cở của $f(x)$ nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kỳ T mà không là hàm tuần hoàn với bất cứ chu kỳ nào bé hơn T.

Bài toán 1.1 (xem [2], [3])**.** Tồn tại hay không tồn tại một hàm số $f(x) \not\equiv$ hằng số, tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ nhưng không có chu kỳ cơ sở.
Lời giải. Xét hàm Dirichlet

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{khi } \ x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{khi } \ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Khi đó $f(x)$ là hàm tuần hoàn trên $\mathbb{R}$ chu kỳ $a \in \mathbb{Q}^*$ tuỳ ý. Vì trong $\mathbb{Q}^*$ không có số nhỏ nhất nên hàm $f(x)$ không có chu kỳ cơ sở.

Bài toán 1.2 (xem [2], [3])**.** Cho cặp hàm $f(x)$, $g(x)$ tuần hoàn trên M có các chu kỳ lần lượt là a và b với $a/b \in \mathbb{Q}$.

Chứng minh rằng $F(x) := f(x) + g(x)$ và $G(x) := f(x)g(x)$ cũng là những hàm tuần hoàn trên M.
Lời giải. Theo giả thiết $\exists m, n \in \mathbb{N}^+$, $(m, n) = 1$ sao cho $a/b = m/n$. Đặt

$$T = na = mb.$$

Ta có

$$\begin{cases} F(x+T) = f(x+na) + g(x+mb) = f(x) + g(x) = F(x), & \forall x \in M \\ G(x+T) = f(x+na)g(x+mb) = f(x)g(x) = G(x), & \forall x \in M \end{cases}$$

Hơn nữa, dễ thấy $\forall x \in M$ thì $x \pm T \in M$. Vậy $F(x), G(x)$ là những hàm tuần hoàn trên M.

Tiếp theo, ta xét hàm số $f(x)$ với tập xác định $D(f) \subset \mathbb{R}$ và tập giá trị $R(f) \subset \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.2 (xem [2],[3])**.**
a) $f(x)$ được gọi là hàm số chẵn trên M, $M \in D(f)$ (gọi tắt là hàm chẵn trên M) nếu

$$\forall x \in M \ \text{ thì } \ -x \in M \ \text{ và } \ f(-x) = f(x), \ \forall x \in M.$$

b) $f(x)$ được gọi là hàm số lẻ trên M (gọi tắt là hàm lẻ trên M) nếu

$$\forall x \in M \ \text{ thì } \ -x \in M \ \text{ và } \ f(-x) = -f(x), \ \forall x \in M.$$

Bài toán 1.3. Cho $x_0 \in \mathbb{R}$. Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ sao cho

$$f(x_0 - x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Lời giải. Đặt $x = \dfrac{x_0}{2} - t$ suy ra $t = \dfrac{x_0}{2} - x$. Khi đó

$$x_0 - x = \frac{x_0}{2} + t$$

và (1.1) có dạng

$$f\Big(\frac{x_0}{2} + t\Big) = f\Big(\frac{x_0}{2} - t\Big),\ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Đặt $g(t) = f\Big(\dfrac{x_0}{2} + t\Big)$ thì

$$g(-t) = f\Big(\frac{x_0}{2} - t\Big),\ f(t) = g\Big(t - \frac{x_0}{2}\Big).$$

Khi đó (1.2) có dạng $g(-t) = g(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Vậy $g(t)$ là hàm chẵn trên $\mathbb{R}$. Kết luận.

$$f(x) = g\Big(x - \frac{x_0}{2}\Big),$$

trong đó $g(x)$ là hàm chẵn tuỳ ý trên $\mathbb{R}$.

Bài toán 1.4. Cho $a, b \in \mathbb{R}$. Xác định tất cả các hàm số $f(x)$ sao cho

$$f(a - x) + f(x) = b,\ \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Lời giải. Đặt $\dfrac{a}{2} - x = t$, khi đó

$$x = \frac{a}{2} - t; \ \text{ và } \ a - x = \frac{a}{2} + t.$$

Khi đó (1.3) có dạng

$$f\Big(\frac{a}{2} + t\Big) + f\Big(\frac{a}{2} - t\Big) = b. \tag{1.4}$$

Đặt

$$f\Big(\frac{a}{2} + t\Big) - \frac{b}{2} = g(t)$$

Khi đó có thể viết (1.4) dưới dạng

$$g(-t) + g(t) = 0,\ \ \forall t \in \mathbb{R}$$

hay là

$$g(-t) = -g(t),\ \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vậy $g(t)$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R}$.